CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL   SEPTIEMBRE DE 2014

PARTE TEORICA

(10 puntos) 1. Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

(a) Escribir las definiciones formales de que: • $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$, • $\lim_n a_n = 1$, • $\sum_n a_n$ es convergente.

(b) Supongamos que $(a_n)_n$ es creciente y que $\lim_n a_n = 1$. Decir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas.

(b1) $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$.

(b2) $\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge.

(b3) $\sum_n a_n$ no converge.

Responder **solamente a uno** de los siguientes apartados.

(c) Elegir una de las afirmaciones en la que la respuesta es afirmativa y probarla.

(d) Elegir una de las afirmaciones en la que la respuesta es negativa y dar un ejemplo que muestre que dicha afirmación en efecto es falsa.

(10 puntos) 2.

(a) Sea f una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = a$, entonces

$$\lim_{t\longrightarrow 0} f(t,t^2) = a \quad y \quad \lim_{t\longrightarrow 0} f(t,t^3) = a.$$

(b) Sea ahora $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple que

$$f(t,t^2) - f(t,t^3) > \cos t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que f no puede tener límite en $(0,0)$.

(10 puntos) 3.

(a) Definición de que un número real $c \in (-1,1)$ es un mínimo relativo de una función $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Elegir una de las siguientes afirmaciones y probarla.

(b1) Si $c \in (-1,1)$ es un mínimo relativo de una función $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ y f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.

(b2) Existen funciones $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $(-1,1)$, las cuales admiten mínimos relativos en puntos $c \in (-1,1)$ en los que no son derivables.

(10 puntos) 4. Sea f una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ y sea (a,b,c) un punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Escribir las definiciones, en términos de límites, de las derivadas parciales de f en (a,b,c), respecto a las variables x_2 y x_3.

(b) Escribir la definición de que f es derivable en (a,b,c).

(c) En las siguientes afirmaciones sustituir $\cdots\cdots$ por la expresión que corresponda.

(c1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a,b,c) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial \cdots\cdots}(\cdots\cdots,\cdots\cdots,c) - \frac{\partial f}{\partial \cdots\cdots}(\cdots\cdots,\cdots\cdots,c)}{h}$.

(c2) $f\ \cdots\cdots \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a,b,c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a,b,c)$, $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\forall i,j \in \{1,2,3\}$.

NOTAS.

• En cada una de las cuatro cuestiones, todos los apartados tienen el mismo peso.

• Para los alumnos que hayan superado el examen parcial:

- Sólo tienen que responder a las cuestiones 3 y 4.
- Si desean mejorar la calificación del examen parcial, entonces tienen que responder también a las cuestiones 1 y 2.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.

CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL SEPTIEMBRE DE 2014

PARTE PRACTICA

(10 puntos) 1. Calcular los siguientes límites.

(a) $\lim_n \frac{\ln 2 - \ln 3 + \cdots - \ln(2n-1) + \ln(2n)}{\ln(n+1)}$.

(b) $\lim_n \tan\left(\frac{n^2}{n^3+1}\right) + \tan\left(\frac{n^2}{n^3+2}\right) + \cdots + \tan\left(\frac{n^2}{n^3+n}\right)$.

(10 puntos) 2. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy - x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si f es continua en $(0,0)$.

(b) Estudiar si f tiene derivadas parciales en $(0,0)$.

(c) Calcular las derivadas parciales en cualquier punto de $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y deducir que f es diferenciable en U.

(c) Estudiar si existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

(10 puntos) 3.

(a) Probar que $x + \ln(1-x) < 0$ para todo $x < 0$.

(b) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x) = \ln(1-x)$ en el punto adecuado, calcular un valor aproximado de $\ln(0.89)$ con tres cifras decimales.

(c) Hallar una cota del valor absoluto del error cometido en el cálculo aproximado realizado en (b).

(10 puntos) 4. Estudiar los valores de x para los que converge y para los que diverge la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}\, x^n}{(n+3)(2n+7)}.$$

NOTAS.

• En cada uno de los cuatro problemas, todos los apartados tienen el mismo peso.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.